پاسخنامه تشریحی فصل شانزدهم

آزمون جامع ۱

۱. گزینه‌ی «۴»

$$y=\frac{x^2-1}{x}=x-\frac{1}{x}\Rightarrow y'=1+\frac{1}{x^2}\Rightarrow y''=0+\frac{0-2x}{x^4}$$

$$\Rightarrow y''=\frac{-2}{x^3}\Rightarrow$$

x		0	
y″	+	‖	−
y	∪	‖	∩

مشتق دوم در $x=0$ تغییر علامت می‌دهد ولی این نقطه در دامنه‌ی تابع قرار ندارد، پس این تابع فاقد نقطه‌ی عطف است.

۲. گزینه‌ی «۴» تابع داده شده همواره مشتق‌پذیر است، پس طول‌های نقاط بحرانی این تابع از $y'=0$ به‌دست می‌آیند، لذا باید مشتق تابع به ازای طول نقاط داده شده برابر صفر باشد.

$$f(x)=x^3+ax^2+bx\Rightarrow f'(x)=3x^2+2ax+b$$

$$\Rightarrow\begin{cases}f'(-1)=0\Rightarrow 3-2a+b=0\\ f'(2)=0\Rightarrow 12+4a+b=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2a-b=3\\ 4a+b=-12\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-\frac{3}{2}\\ b=-6\end{cases}$$

$$\Rightarrow a\times b=9$$

۳. گزینه‌ی «۳» در گزینه‌ی «۳» مشتق تابع داده شده همواره مثبت بوده و در نتیجه تابع اکیداً صعودی و فاقد ماکزیمم و می‌نیمم نسبی است:

$$y=x^3+x\Rightarrow y'=3x^2+1>0$$

۴. گزینه‌ی «۴» نمودار تابع از مبدأ مختصات گذشته است، یعنی $f(0)=0$ است، پس:

$$0=\frac{0+0+b}{0+c}\Rightarrow b=0\Rightarrow f(x)=\frac{x^2+ax}{x^2+c}$$

مجانب افقی تابع برابر است با:

$$\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x^2}=1$$

لذا خط $y=1$ مجانب افقی تابع بوده و با توجه به شکل رسم شده نتیجه می‌گیریم که عرض مستطیل داده شده هم برابر ۱ است. از طرفی با توجه به این که مساحت مستطیل ۴ واحد مربع است داریم:

$$S=\text{طول}\times\text{عرض}\Rightarrow 4=\text{طول}\times 1$$

پس طول مستطیل هم برابر ۴ است، چون نمودار تابع نیست به محور yها متقارن است، لذا باید رأس‌های مستطیل که واقع بر محور xهاست دارای طول‌های ۲ و ۲- باشد (فاصله‌ی ۲- تا ۲ برابر ۴ می‌شود). لذا با توجه به شکل خط $x=\pm 2$ مجانب‌های قائم تابع و در نتیجه ریشه‌ی مخرج هستند، پس:

$$(\pm 2)^2+c=0\Rightarrow c=-4$$

لذا ضابطه‌ی تابع به صورت $y=\frac{x^2+ax}{x^2-4}$ در می‌آید. برای پیدا کردن a مشاهده می‌کنیم که نمودار تابع بر محور xها مماس شده است، پس معادله‌ی تلاقی تابع با محور xها باید ریشه‌ی مضاعف داشته باشد:

$$\xrightarrow[y=0]{\text{تلاقی با محور xها}}0=\frac{x^2+ax}{x^2-4}\Rightarrow x^2+ax=0$$

$$\xrightarrow{\text{شرط ریشه‌ی مضاعف}}\Delta=0$$

$$\Rightarrow\Delta=a^2-0=0\Rightarrow a=0$$

$$\Rightarrow a+b+c=0+0-4=-4$$

۵. گزینه‌ی «۲» باید مشتق تابع حداقل دو ریشه‌ی ساده داشته باشد. پس:

$$y=(x^2-x+k^2)e^{-x}\Rightarrow y'=(2x-1)e^{-x}+(-e^{-x})(x^2-x+k^2)$$

$$\Rightarrow y'=e^{-x}(2x-1-x^2+x-k^2)=e^{-x}(-x^2+3x-1-k^2)=0$$

$$\xrightarrow{e^{-x}\neq 0}-x^2+3x-1-k^2=0$$

پس معادله‌ی فوق باید ۲ ریشه داشته باشد، یعنی دلتای معادله باید مثبت باشد:

$$\Delta=9-4(-1)(-1-k^2)>0\Rightarrow 9-4-4k^2>0$$

$$\Rightarrow 5-4k^2>0\Rightarrow 5>4k^2\Rightarrow k^2<\frac{5}{4}\Rightarrow\frac{-\sqrt{5}}{2}<k<\frac{\sqrt{5}}{2}$$

که در این بازه اعداد صحیح ۱-، ۰ و ۱ برای k وجود دارد یعنی برای k، سه مقدار وجود دارد.

۶. گزینه‌ی «۴» از روی نمودار تابع مشاهده می‌کنیم که خط $y=1$ مجانب افقی تابع است، پس:

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=1\Rightarrow\lim_{x\to\infty}\frac{ax^2}{x^2}=1\Rightarrow a=1$$

از طرفی $f(0)=2$ است، پس:

$$f(0)=\frac{0+0+c}{0+1}=2\Rightarrow c=2$$

هم‌چنین خط $y=2$ بر نمودار تابع مماس شده است، یعنی تلاقی تابع با خط $y=2$ باید ریشه‌ی مضاعف داشته باشد:

$$y=\frac{x^2+bx+2}{x^2+1}\xrightarrow{\text{تلاقی با خط } y=2}2=\frac{x^2+bx+2}{x^2+1}\Rightarrow$$

$$2x^2+2=x^2+bx+2$$

$$\Rightarrow x^2-bx=0\xrightarrow[\Delta=0]{\text{شرط ریشه‌ی مضاعف}}\Delta=b^2-0=0\Rightarrow b=0$$

۷. گزینه‌ی «۳» خط $y=0$ (محور xها) مجانب افقی تابع است، پس:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=0 \Rightarrow \lim_{x\to\pm\infty}\frac{ax^2}{x^2}=a=0 \Rightarrow \boxed{a=0} \Rightarrow$$

$$f(x)=\frac{bx}{x^2+4}$$

نمودار تابع بر خط $y=4$ مماس است، پس معادله‌ی تلاقی تابع با خط $y=4$ باید ریشه‌ی مضاعف داشته باشد.

$$f(x)=\frac{bx}{x^2+4}\xrightarrow{\text{تلاقی با خط } y=4} 4=\frac{bx}{x^2+4}\Rightarrow 4x^2+16=bx$$

$$\Rightarrow 4x^2-bx+16=0 \xrightarrow{\text{شرط ریشه‌ی مضاعف}} \Delta=0\Rightarrow$$

$$b^2-4\times4\times16=0\Rightarrow$$

$$b^2=16\times16\Rightarrow b=\pm16$$

که $b=-16$ قابل قبول نمی‌باشد.

۸. گزینه‌ی «۳» نقطه‌ی اکسترمم نسبی دارای دو ویژگی است: اولاً مشتق تابع به ازای طول نقطه‌ی اکسترمم صفر می‌شود، یعنی $f'(1)=0$، ثانیاً مختصات نقطه‌ی اکسترمم در تابع صدق می‌کند، یعنی، $f(1)=-2$. بنابراین:

$$f(x)=\frac{x^2+ax+b}{x+1}\xrightarrow{f(1)=-2}\frac{1+a+b}{1+1}=-2\Rightarrow$$

$$1+a+b=-4\Rightarrow\boxed{a+b=-5}$$

$$f'(x)=\frac{(2x+a)(x+1)-(x^2+ax+b)}{(x+1)^2}\xrightarrow{f'(1)=0}$$

$$(2+a)(1+1)-(1+a+b)=0$$

$$\Rightarrow 4+2a-1-a-b=0\Rightarrow\boxed{a-b=-3}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a+b=-5\\a-b=-3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-4\\b=-1\end{cases}\Rightarrow(a,b)=(-4,-1)$$

۹. گزینه‌ی «۱» می‌دانیم که توابع چند ضابطه‌ای در نقاط مرزی امکان دارد مشتق‌پذیر باشند. پس:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(x+1)=1\\ \lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}(x^2)=0\end{cases}$$

پس تابع در $x=0$ ناپیوسته بوده و در نتیجه مشتق‌ناپذیر است، پس $x=0$ طول نقطه‌ی بحرانی تابع است. حال به دنبال نقاطی می‌گردیم که $f'(x)=0$ می‌شود:

$$f'(x)=\begin{cases}2x & -1<x<0\\ 1 & 0<x<2\end{cases}\Rightarrow f'(x)=0\Rightarrow 2x=0\Rightarrow x=0$$

که قبلاً مورد بررسی قرار گرفته بود. پس این تابع فقط در $x=0$ بحرانی است.

۱۰. گزینه‌ی «۴»

$$f(x)=x^{\frac{5}{3}}-5x^{\frac{2}{3}}\Rightarrow f'(x)=\frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}-\frac{10}{3}x^{-\frac{1}{3}}\Rightarrow$$

$$f'(x)=\frac{1}{3}x^{-\frac{1}{3}}(5x-10)=\frac{5x-10}{3\sqrt[3]{x}}$$

در نقاط بحرانی تابع، مشتق تابع یا صفر است و یا وجود ندارد، پس:

$$\begin{cases}f'(x)=0\Rightarrow 5x-10=0\Rightarrow x=2\\ \text{وجود ندارد } f'(x)\Rightarrow\sqrt[3]{x}=0\Rightarrow x=0\end{cases}$$

فقط $x=0$ در بازه‌ی $(-1,2)$ قرار داشته و طول نقاط بحرانی تابع محسوب می‌شود، پس تابع دارای یک نقطه‌ی بحرانی است.

آزمون جامع ۲

۱. گزینه‌ی «۴» در تابع داده شده، دامنه‌ی تابع برابر است با:

$$\underbrace{1-x^2\ge0}_{(*)}\Rightarrow x^2\le1\Rightarrow -1\le x\le1$$

که با توجه به گزینه‌های داده شده، گزینه‌ی «۴» صحیح است و جواب مسأله معلوم است، ولی به حل ادامه می‌دهیم:

$$y=\sqrt{1-x^2}\Rightarrow y'=\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}=\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\Rightarrow y''=$$

$$\frac{(-1)\sqrt{1-x^2}-\frac{\cancel{-2}x}{\cancel{2}\sqrt{1-x^2}}(-x)}{1-x^2}$$

$$\Rightarrow y''=\frac{\frac{-(1-x^2)+x(-x)}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}=\frac{-1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}\xrightarrow{(*)}y''<0$$

پس تابع در دامنه‌اش همواره مقعر به پایین است.

۲. گزینه‌ی «۲»

$$y=x^{\frac{4}{3}}-2x^{\frac{1}{3}}\Rightarrow y'=\frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}-\frac{2}{3}x^{-\frac{2}{3}}$$

$$\Rightarrow y'=\frac{2}{3}x^{-\frac{2}{3}}(2x-1)=\frac{2(2x-1)}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

$$\begin{cases}y'=0\Rightarrow 2x-1=0\Rightarrow x=\frac{1}{2}\\ \text{وجود ندارد } y'\Rightarrow\sqrt[3]{x^2}=0\Rightarrow x=0\end{cases}$$

پس طول‌های نقاط بحرانی تابع $\left\{0,\frac{1}{2}\right\}$ است. توجه داشته باشید که دامنه‌ی تابع $\mathbb{R}$ بوده و هر دو عدد به دست آمده قابل قبول هستند.

۳. گزینه‌ی «۲» نمودار تابع بر محور xها مماس است، پس تلاقی تابع با خط $y=0$ باید ریشه‌ی مضاعف داشته باشد:

$$y=\frac{x^2+ax}{x+b}=0\Rightarrow x^2+ax=0\xrightarrow{\text{شرط ریشه‌ی مضاعف}}D=0\Rightarrow x=0$$

$$a^2-0=0\Rightarrow a=0$$

از طرفی مجانب مایل تابع محور yها را در نقطه‌ای به عرض (-2) قطع کرده است یعنی نقطه‌ی $(0,-2)$ در آن صدق می‌کند. پس با روش تقسیم مجانب مایل تابع را می‌یابیم.

$$\begin{array}{l|l} x^2 & x+b \\ \hline -x^2-bx & x-b \to y=x-b \ \text{(مجانب مایل)} \\ -bx & \end{array}$$

$$\xrightarrow[\text{در مجانب}]{(0,-2)} -2=0-b \Rightarrow b=2$$

۴. گزینه‌ی «۳» این تابع همواره پیوسته و مشتق‌پذیر بوده و طول نقاط عطف تابع از حل معادله‌ی $y''=0$ به دست می‌آیند، پس:

$$y=x^2e^{-2x} \Rightarrow y'=2x\,e^{-2x}+(-2)e^{-2x}(x^2)=e^{-2x}(2x-2x^2)$$

$$\Rightarrow y''=(-2e^{-2x})(2x-2x^2)+e^{-2x}(2-4x)$$

$$\Rightarrow y''=e^{-2x}(-4x+4x^2+2-4x)=2e^{-2x}(2x^2-4x+1)$$

$$\Rightarrow y''=0 \xrightarrow{2e^{-2x}\neq 0} 2x^2-4x+1=0$$

$$\Rightarrow x_1+x_2=-\frac{b}{a}=\frac{4}{2}=2$$

۵. گزینه‌ی «۳» با توجه به ضابطه‌ی تابع ابتدا دامنه‌ی تابع را می‌یابیم:

$$8-x^2\geq 0 \Rightarrow x^2\leq 8 \Rightarrow -2\sqrt{2}<x\leq 2\sqrt{2}$$

پس کافی است ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع داده شده را در بازه‌ی $\left[-2\sqrt{2}\,,\,2\sqrt{2}\right]$ بیابیم. ابتدا باید نقاط بحرانی تابع را در این بازه به دست آوریم:

$$y=1+x+\sqrt{8-x^2} \Rightarrow y'=1+\frac{-2x}{2\sqrt{8-x^2}}=0$$

$$\Rightarrow 1=\frac{x}{\sqrt{8-x^2}} \Rightarrow \sqrt{8-x^2}=x \Rightarrow 8-x^2=x^2$$

$$\Rightarrow 2x^2=8 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\pm 2 \to$$ طول‌های نقاط بحرانی

حال باید مقدار تابع را به ازای طول‌های نقاط بحرانی و ابتدا و انتهای بازه به دست آورده و سپس آن‌ها را با هم مقایسه نماییم:

$$f(x)=1+x+\sqrt{8-x^2} \Rightarrow \begin{cases} f(2)=1+2+2=5 \to \max \\ f(-2)=1-2+2=1 \\ f(2\sqrt{2})=1+2\sqrt{2}+0=1+2\sqrt{2} \\ f(-2\sqrt{2})=1-2\sqrt{2}+0=1-2\sqrt{2} \to \min \end{cases}$$

$$\Rightarrow \max-\min=5-(1-2\sqrt{2})=4+2\sqrt{2}$$

۶. گزینه‌ی «۳» از روی نمودار تابع مشاهده می‌کنیم که مجانب‌های مایل تابع به صورت $y=\pm 2x$ است. پس کافی است مجانب‌های تابع را بیابیم و با $\pm 2x$ مقایسه نماییم:

$$y=-\sqrt{ax^2+bx+4} \xrightarrow{\text{هم‌ارزی}} y=-\sqrt{a}\left|x+\frac{b}{2a}\right|$$

$$\Rightarrow y=\pm\sqrt{a}\left(x+\frac{b}{2a}\right)=\pm 2x \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{a}=2 \Rightarrow a=4 \\ \frac{b}{2a}=0 \Rightarrow b=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2a-b=8-0=8$$

۷. گزینه‌ی «۳» با توجه به ویژگی‌های نقاط اکسترمم، داریم:

$$\begin{cases} f(-1)=2 \to \text{در تابع صدق می‌کند.} \\ f'(-1)=0 \to \text{طول اکسترمم، مشتق تابع را صفر می‌کند.} \end{cases}$$

$$f(x)=\frac{ax+b}{x^2+2x} \xrightarrow{f(-1)=2} \frac{-a+b}{1-2}=2$$

$$\Rightarrow -a+b=-2 \quad (1)$$

$$f'(x)=\frac{a(x^2+2x)-(2x+2)(ax+b)}{(x^2+2x)^2} \quad (*)$$

$$\xrightarrow{f'(-1)=0} 0=a(1-2)-(-2+2)(-a+b) \Rightarrow 0=-a-0$$

$$\Rightarrow a=0 \xrightarrow{(1)} b=-2$$

حال با توجه به مقادیر به دست آمده برای a و b رابطه‌ی (*) به شکل زیر ساده می‌شود:

$$y'=\frac{4(x+1)}{(x^2+2x)^2} \xrightarrow{\text{تعیین علامت}}$$

x		-2		-1		0	
y'	$-$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$
y	↘	‖	↘		↗	‖	↗

min نسبی

پس تابع در نقطه‌ی $(-1,2)$ دارای مینیمم نسبی بوده و حاصل $a+b$ برابر (-2) است.

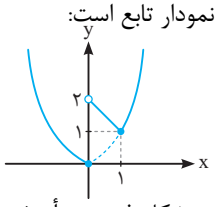
۸. گزینه‌ی «۲» پس باید نامعادله‌ی $y''>0$ را حل کنیم:

$$y=x^4+6ax^2+12x \Rightarrow y'=4x^3+12ax+12$$

$$\Rightarrow y''=\underbrace{12x^2}_{\text{مثبت}}+12a>0 \Rightarrow 12a>0 \Rightarrow a>0$$

۹. گزینه‌ی «۴» بهترین روش برای پاسخ‌گویی به این سؤال رسم نمودار تابع است:

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & ;\ x\geq 1 \\ -x+2 & ;\ 0<x<1 \\ x^2 & ;\ x\leq 0 \end{cases} \Rightarrow$$



در شکل فوق مبدأ مختصات هم می‌نیمم نسبی و هم مینیمم مطلق بوده و نقطه‌ی $(1,1)$ هم می‌نیمم نسبی است.

۱۰. گزینه‌ی «۱»

$$y=\tan x+\cot x \to y'=(1+\tan^2 x)-(1+\cot^2 x)$$

$$\Rightarrow y'=\tan^2 x-\cot^2 x \Rightarrow y''=2\tan x(1+\tan^2 x)+2\cot x(1+\cot^2 x)$$

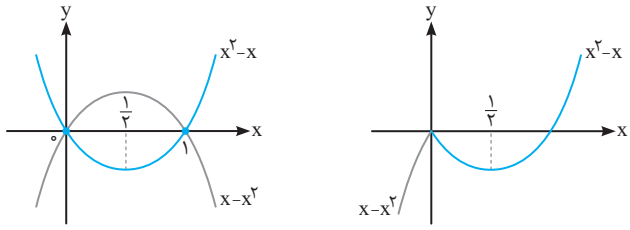
بازه‌ی داده شده ربع اول دایره‌ی مثلثاتی بوده و همه‌ی نسبت‌های مثلثاتی در این ناحیه مثبت هستند، پس:

$y''>0$ بوده و در نتیجه تقعر تابع همواره رو به بالاست.

آزمون جامع ۳

۱. گزینه‌ی «۱» کافی است ضابطه‌ی تابع را ساده کرده و نمودار آن را رسم کنیم:

$$y=\begin{cases}(x-1)(x) & x\geq 0\\ (x-1)(-x) & x<0\end{cases}\Rightarrow y=\begin{cases}x^2-x & x\geq 0\\ x-x^2 & x<0\end{cases}\Rightarrow x_S=-\frac{b}{2a}=\frac{1}{2}$$



پس با توجه به شکل، مشاهده می‌کنیم که تابع در بازه‌ی $(0,\frac{1}{2})$ نزولی است.

۲. گزینه‌ی «۱» تقعر رو به پایین، یعنی $y''<0$، پس:

$$y=(x-1)e^x\Rightarrow y'=1\times e^x+(x-1)e^x$$
$$\Rightarrow y'=e^x(1+x-1)=xe^x$$
$$\Rightarrow y''=1\times e^x+xe^x\Rightarrow y''=e^x(1+x)<0$$
$$\xrightarrow{e^x>0}1+x<0\Rightarrow x<-1$$

۳. گزینه‌ی «۱» می‌دانیم که در نقاط اکسترمم نسبی توابع پیوسته و غیر ثابت، مشتق تابع تغییر علامت می‌دهد، پس باید m را به گونه‌ای تعیین کنیم که $f'(x)$ فقط در یک نقطه تغییر علامت دهد، یعنی معادله‌ی $f'(x)=0$ فقط یک ریشه‌ی ساده داشته باشد. پس ابتدا ریشه‌های $f'(x)=0$ را به دست می‌آوریم:

$$f'(x)=(mx+1)(x^2-3x+2)=0\Rightarrow\begin{cases}mx+1=0\Rightarrow x=\frac{-1}{m}\\ (x-1)(x-2)=0\Rightarrow x=1,2\end{cases}$$

مشتق دارای سه ریشه است، پس باید یکی از ریشه‌ها تکراری باشد تا از نوع مضاعف بوده و مشتق در آن‌ها تغییر علامت ندهد، پس:

$$\begin{cases}\frac{-1}{m}=1\Rightarrow m=-1\\ \text{یا}\qquad\qquad \text{یا}\\ -\frac{1}{m}=2\Rightarrow m=\frac{-1}{2}\end{cases}\Rightarrow m_1+m_2=-1-\frac{1}{2}=-\frac{3}{2}$$

۴. گزینه‌ی «۱» چون نمودار داده شده نمودار تابع $f'(x)$ است، مشاهده می‌کنیم که:

$$\begin{cases}f'(1)=0 & (*)\\ \lim\limits_{x\to\infty}f'(x)=1 & (**)\end{cases}$$

پس کافی است مشتق تابع را در ابتدا بیابیم:

$$f(x)=\frac{ax^2-2x+b}{x-2}\Rightarrow f'(x)=\frac{(2ax-2)(x-2)-(1)(ax^2-2x+b)}{(x-2)^2}$$
$$\Rightarrow f'(x)=\frac{2ax^2-4ax-\cancel{2x}+4-ax^2+\cancel{2x}-b}{(x-2)^2}=\frac{ax^2-4ax+4-b}{(x-2)^2}$$
$$\Rightarrow\lim_{x\to\infty}f'(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{ax^2}{x^2}=a\xrightarrow{(**)}a=1$$
$$f'(1)=0\xrightarrow{a=1}\frac{1-4+4-b}{(1-2)^2}=0\Rightarrow 1-b=0\Rightarrow b=1$$
$$\Rightarrow a\times b=1$$

۵. گزینه‌ی «۱» تفاوت نمودارها در یکنوایی و تقعر آن‌هاست، پس کافی است مشتق اول و دوم تابع را در حوالی $x=\pi$ بررسی نماییم.

$$y=\text{Ln}\,x+\cos x\Rightarrow y'=\frac{1}{x}-\sin x\Rightarrow y'(\pi)=\frac{1}{\pi}-0>0$$

پس تابع در حوالی $x=\pi$ صعودی است. ← گزینه‌های «۱» یا «۲»

$$y''=\frac{-1}{x^2}-\cos x\Rightarrow y''(\pi)=\frac{-1}{\pi^2}+1>0$$

پس تقعر تابع در حوالی $x=\pi$ رو به بالاست، پس گزینه‌ی «۱» پاسخ صحیح است.

۶. گزینه‌ی «۴» می‌دانیم که در نقاط عطف اولاً تابع پیوسته بوده، ثانیاً دارای یک خط مماس است و ثالثاً جهت تقعر تابع هم عوض می‌شود، پس:

الف) بررسی شرط پیوستگی تابع در $x=-1$

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to(-1)^+}f(x)=\lim\limits_{x\to(-1)^+}(-x^2+b)=-1+b\\ \lim\limits_{x\to(-1)^-}f(x)=\lim\limits_{x\to(-1)^-}(x^2-ax)=(1+a)\end{cases}$$
$$\Rightarrow -1+b=1+a\Rightarrow a-b=-2\quad(1)$$

ب) بررسی شرط وجود خط مماس: باید مشتقات راست و چپ تابع در $x=-1$ با هم برابر باشند:

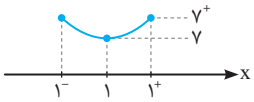
$$f'(x)=\begin{cases}2x-a & x<-1\Rightarrow f'_-(-1)=-2-a\\ -2x & x>-1\Rightarrow f'_+(-1)=(-2)(-1)=2\end{cases}\Rightarrow$$
$$-2-a=2$$
$$\Rightarrow a=-4\xrightarrow{(1)}b=-2\to a+b=-6$$

۷. گزینه‌ی «۳» کافی است مقدار تابع را در $x=1$ با همسایگی‌های آن مقایسه نماییم:

$$\begin{cases}f(1)=7\\ f(1^+)=(1^+-1)^4(1+2)^3+7=0^+\times 8+7=0^++7=7^+\\ f(1^-)=(1^--1)^4(1+2)^3+7=(0^-)^4\times 8+7=0^++7=7^+\end{cases}$$

پس مقدار تابع از همسایه‌هایش کم‌تر است، یعنی تابع در $x=1$ دارای می‌نیمم نسبی است.

به شکل زیر هم می‌توانید نگاه کنید:



۸. گزینه‌ی «۱» ابتدا نقاط بحرانی تابع را می‌یابیم:

$$f(x)=\frac{2}{3}x^3-3x^2+4x-1$$

$$f'(x)=2x^2-6x+4=2(x^2-3x+2)=2(x-1)(x-2)=0$$

$$\Rightarrow x=1\,,\ x=2$$

$x=1$ در بازه‌ی $(1,3)$ قرار نداشته ولی $x=2$ در بازه بوده و نقطه‌ی بحرانی تابع است، پس:

$$\begin{cases} f(1)=\frac{2}{3}-3+4-1=\frac{2}{3} \\ f(3)=18-27+12-1=2 \\ f(2)=\frac{16}{3}-12+8-1=\frac{1}{3}\rightarrow \min \end{cases}$$

۹. گزینه‌ی «۱» ابتدا با تعیین علامت $(x-1)$، قدر مطلق را حذف می‌نماییم.

$$f(x)=\sqrt[3]{x}\,|x-1|=\begin{cases}(x-1)\sqrt[3]{x} & x\geq 1\\ -(x-1)\sqrt[3]{x} & x<1\end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{x}+(x-1)\times\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} & x>1\\ -(\sqrt[3]{x}+(x-1)\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}) & x<1\end{cases}$$

مشتق تابع در $x=0$ وجود ندارد و همچنین مشتقات راست و چپ تابع در $x=1$ قرینه‌ی یکدیگرند، پس مشتق تابع در $x=1$ هم وجود ندارد. حال ریشه‌های $f'(x)=0$ را می‌یابیم:

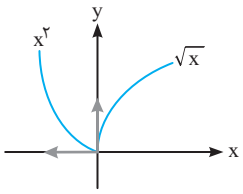
$$\sqrt[3]{x}+\frac{x-1}{3\sqrt[3]{x^2}}=0\xrightarrow{\times 3\sqrt[3]{x^2}}3x+x-1=0\Rightarrow 4x=1$$

$$\Rightarrow x=\frac{1}{4}$$

پس مجموعه طول‌های نقاط بحرانی این تابع عبارتند از:

$\frac{1}{4}$ ، صفر و ۱

۱۰. گزینه‌ی «۱» کافی است نمودار تابع را رسم کنیم:



با توجه به شکل مشاهده می‌کنیم که نمودار تابع فاقد نقطه‌ی عطف است. دقت کنید که تابع در مبدأ مختصات دارای مماس نبوده و در نتیجه عطف هم ندارد.

آزمون جامع ۴

۱. گزینه‌ی «۲» کافی است ریشه‌ی مشتق دوم تابع را به‌دست آوریم تا طول نقطه‌ی عطف تابع به‌دست آید:

$$y=e^{\frac{1}{x}}\Rightarrow y'=-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}\Rightarrow y''=\frac{0+2x}{x^4}e^{\frac{1}{x}}+(-\frac{1}{x^2})(-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}})$$

$$\Rightarrow y''=\frac{1}{x^4}e^{\frac{1}{x}}(2x+1)=0$$

$x=0$ ریشه‌ی مخرج بوده و در دامنه‌ی تابع قرار ندارد و همچنین $e^{\frac{1}{x}}>0$ بوده، پس کافی است $2x+1=0$ باشد.

$$\Rightarrow x=-\frac{1}{2}\rightarrow \text{طول عطف}$$

$$\Rightarrow y=e^{\frac{1}{-\frac{1}{2}}}=e^{-2}=a\Rightarrow \text{Ln}\,a=\text{Ln}\,e^{-2}$$

$$=-2\text{Ln}\,e=-2\times 1=-2$$

۲. گزینه‌ی «۲» چون تابع در نقطه‌ی $(1,2)$ دارای می‌نیمم نسبی است، پس:

$$\begin{cases} f(1)=2 & (1)\\ f'(1)=0 & (2)\end{cases}$$

همچنین نمودار تابع محور yها را در نقطه‌ای به عرض ۳ قطع کرده است، یعنی: $f(0)=3 \quad (3)$

بنابراین داریم:

$$f(x)=ax^4+bx^2+c\Rightarrow\begin{cases} f(1)=a+b+c=2\Rightarrow & (**)\\ f(0)=0+0+c=3\Rightarrow c=3 & (*)\end{cases}$$

$$f'(x)=4ax^3+2bx\xrightarrow[x=1]{(2)}4a+2b=0\Rightarrow b=-2a \quad (3)$$

$$a+b+c=2\xrightarrow{(*)}a+b+3=2\Rightarrow a+b=-1 \quad (4)$$

$$\begin{cases} b=-2a\\ a+b=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} a=1\\ b=-2\end{cases}\Rightarrow a-b=3$$

۳. گزینه‌ی «۴» نمودار تابع در $x=1$ توخالی رسم شده است، پس $x=1$ هم ریشه‌ی صورت و هم ریشه‌ی مخرج است، پس:

$$\begin{cases} 2+a=0\Rightarrow a=-2\\ 1+b+c=0\Rightarrow b+c=-1 & (*)\end{cases}$$

از طرفی $x=-2$ مجانب قائم تابع و در نتیجه ریشه‌ی مخرج است، بنابراین:

$$(-2)^2+b(-2)+c=0\Rightarrow 4=2b-c \quad (**)$$

$$\Rightarrow\begin{cases} b+c=-1\\ 2b-c=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} b=1\\ c=-2\end{cases}\Rightarrow a+c=-4$$

۴. گزینه‌ی «۲» باید مشتق تابع در این بازه منفی باشد، پس:

$$y=x^3-3ax^2+1\Rightarrow y'=3x^2-6ax=0\Rightarrow 3x(x-2a)=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases} x=0\\ x=2a\end{cases}$$

x		0		2a	
y'	+		−		+
y	↗		↘		↗

یا

x		2a		0	
y'	+		−		+
y	↗		↘		↗

از آنجایی که در سؤال گفته شده است بازه‌ی $[-۴,۰]$ تابع نزولی اکید است می‌بایست $۲a=-۴$ بوده و در نتیجه $a=-۲$

۵. گزینه‌ی «۲» از روی نمودار تابع ملاحظه می‌کنیم که مجانب‌های مایل تابع از مبدأ مختصات عبور می‌کند. پس کافی است مجانب‌های مایل تابع را پیدا کرده و پس نقطه‌ی $(۰,۰)$ را در آن قرار دهیم:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\alpha x+\beta}{\sqrt{x^۲-۱}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\alpha x}{\sqrt{x^۲}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\alpha x}{|x|}=\pm\alpha$$

$$\Rightarrow f(x)=|x|+\frac{\alpha x+\beta}{\sqrt{x^۲-۱}}\underset{x\to\pm\infty}{\sim}|x|\pm\alpha$$

پس $y=x+\alpha$ و $y=x-\alpha$ مجانب‌های مایل تابع هستند که با قرار دادن نقطه‌ی $(۰,۰)$ در این دو خط نتیجه می‌گیریم که α باید صفر باشد.

گزینه‌های «۲» یا «۴»

$$y=x+\alpha\xrightarrow{(۰,۰)}۰=۰+\alpha\Rightarrow\underline{\alpha=۰}\rightarrow$$

از طرفی از روی نمودار تابع مشاهده می‌کنیم که: $\lim_{x\to۱^+}f(x)=-\infty$ ، پس:

$$f(x)=|x|+\frac{\beta}{\sqrt{x^۲-۱}}\Rightarrow\lim_{x\to۱^+}f(x)=۱+\frac{\beta}{\sqrt{۱^+-۱}}=۱+\frac{\beta}{۰^+}$$

$$=-\infty\Rightarrow\frac{\beta}{۰^+}=-\infty\Rightarrow\beta<۰$$

پس گزینه‌ی «۲» پاسخ صحیح است.

۶. گزینه‌ی «۲» کافی است با محاسبه‌ی مشتق اول و دوم تابع، طول‌های نقاط اکسترمم و عطف تابع را بیابیم:

$$f(x)=\frac{۲۴}{x^۲+۱۲}\Rightarrow f'(x)=\frac{۰-(۲x)(۲۴)}{(x^۲+۱۲)^۲}=۰\Rightarrow x=۰$$

$x=۰$ طول نقطه‌ی اکسترمم تابع بوده که با قراردادن آن در تابع، عرض نقطه‌ی اکسترمم هم به‌دست می‌آید:

$$x=۰\Rightarrow y=\frac{۲۴}{۱۲}=۲\Rightarrow A(۰,۲)\Rightarrow y'=\frac{-۴۸x}{(x^۲+۱۲)^۲}$$

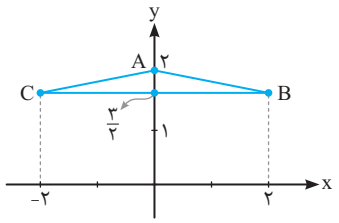
$$\Rightarrow y''=\frac{-۴۸(x^۲+۱۲)^۲-۲(۲x)(x^۲+۱۲)(-۴۸x)}{(x^۲+۱۲)^۴}$$

$$\Rightarrow y''=\frac{-۴۸(x^۲+۱۲)(x^۲+۱۲-۴x^۲)}{(x^۲+۱۲)^۴}=\frac{-۴۸(۱۲-۳x^۲)}{(x^۲+۱۲)^۳}$$

$$\Rightarrow y''=۰\Rightarrow ۱۲-۳x^۲=۰\Rightarrow x=\pm۲$$

$$\begin{cases}x=۲\rightarrow y=\frac{۲۴}{۴+۱۲}=\frac{۲۴}{۱۶}=\frac{۳}{۲}\Rightarrow B(۲,\frac{۳}{۲})\\ x=-۲\rightarrow y=\frac{۲۴}{۴+۱۲}=\frac{۳}{۲}\Rightarrow C(-۲,\frac{۳}{۲})\end{cases}$$

حال مثلث ABC را رسم می‌کنیم:



$$\Rightarrow S=\frac{\frac{۱}{۲}\times۴}{۲}=۱$$

۷. گزینه‌ی «۲»

$$y'=\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{(x-۱)^۲}}+۳(x-۱)^۲\Rightarrow y'(۰)=+\infty+۰=+\infty$$

پس تابع در $x=۱$ مشتق‌پذیر نمی‌باشد.

۸. گزینه‌ی «۴»

$$y=x^۲e^{-x}\Rightarrow y'=۲x\,e^{-x}+(-e^{-x})(x^۲)$$

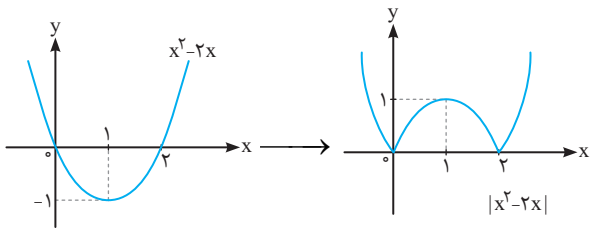
$$\Rightarrow y'=e^{-x}(۲x-x^۲)\xrightarrow{\text{اکیداً صعودی}}y'>۰$$

$$e^{-x}(۲x-x^۲)=۰\xrightarrow{e^{-x}>۰}۲x-x^۲=۰\Rightarrow x=۰\,,\,۲$$

x		۰		۲	
y′	−		+		−
y	↘ نزولی		↗ صعودی		↘ نزولی

پس تابع در بازه‌ی $[۰,۲]$ اکیداً صعودی است.

۹. گزینه‌ی «۳» کافی است شکل تابع را رسم کنیم:



با توجه به شکل مشاهده می‌کنیم که تابع $y=|x^۲-۲x|$ دارای ۲ می‌نیمم نسبی در $x=۰$ و $x=۲$ است.

۱۰. گزینه‌ی «۲» تمایز شکل‌ها در یکنوایی و تقعر تابع می‌باشد، پس کافی است یکنوایی و تقعر تابع را در $x=\frac{\pi}{۶}$ بررسی نماییم:

$$f(x)=\sin^۲x+\sin x\Rightarrow f'(x)=۲\cos x\,\sin x+\cos x$$

$$\Rightarrow f'(x)=\sin ۲x+\cos x\Rightarrow f'(\frac{\pi}{۶})=\frac{\sqrt{۳}}{۲}+\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\sqrt{۳}>۰$$

پس تابع در حوالی $x=\frac{\pi}{۶}$ صعودی است پس گزینه‌ی «۱» یا «۲» صحیح است.

$$f''(x)=۲\cos ۲x-\sin x\Rightarrow f''(\frac{\pi}{۶})=۲\times\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۲}>۰$$

پس تقعر تابع هم در $x=\frac{\pi}{۶}$ رو به بالاست پس گزینه‌ی «۲» پاسخ صحیح است.